

一种电子设备贝叶斯可靠性评估的新方法

尹宗润^{1,2}, 李俊山², 苏 东¹

(1 中国人民解放军 96520 部队, 河南 洛阳 471031; 2 第二炮兵工程大学, 陕西 西安 710025)

摘 要: 针对贝叶斯方法应用中后验参数的运算复杂性问题, 提出了一种电子设备贝叶斯可靠性评估的新方法. 基于工程实践中常见的先验信息建立失效率先验分布, 通过随机采样构建设备寿命分布参数的离散联合先验分布, 结合截尾试验数据, 再通过二次随机采样得到分布参数的离散联合后验分布函数. 通过实例给出了运算过程, 并与其它贝叶斯运算方法进行了比较. 结果表明, 此方法在确保精度的同时可以大大简化计算过程, 在电子设备可靠性评估中有较高的应用价值.

关键词: 电子设备; 贝叶斯方法; 可靠性评估; 寿命分布

中图分类号: TB114.3

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2014)06-0107-04

A Novelty Method for Bayesian Reliability Assessment of Electronic Equipment

YIN Zong-run^{1,2}, LI Jun-shan², SU Dong¹

(1 96520 PLA Troops, Luoyang 471031, China; 2 The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China)

Abstract: Aiming at the posterior parameter computation difficulty of Bayes method in engineering application, this paper proposed a novelty method for Bayesian reliability assessment of electronic equipment. The prior distribution of failure rate is built according to the engineering experiences, based on the prior distribution, this approach allows constructing the discrete joint prior distribution of lifetime distribution parameters through random sampling, combined with the censoring data of life test, random sample is adopted again to obtain the discrete joint posterior distribution of the parameters. A practical example is given as an illustration, the process is compared with the other approaches. Result shows that, this approach can simplify much computation in practical applications as well as ensure the accuracy; it has great values for electronic equipment reliability assessment.

Key words: electronic equipment; Bayes method; reliability assessment; lifetime distribution

1 引言

可靠性评估是电子设备可靠性工程的重要内容. 电子设备常用的寿命分布模型有指数分布和 Weibull 分布, Weibull 分布模型由于能够表现为不同的形状以及对各种试验数据的适应性, 在可靠性分析中得到了广泛的应用^[1].

贝叶斯方法能减少所需试验子样数, 提高试验效率, 但由于其分析过程大多涉及复杂的数值积分运算, 因此其后验参数的计算问题也成为应用中的一大难题. 随机模拟方法的出现在一定程度上解决

了这一难题. 典型的方法有蒙特卡洛方法和马尔科夫链蒙特卡洛 (Markov Chain Monte Carlo, MC-MC) 方法^[2]. 当参数的联合后验分布以一些条件分布或者边缘分布形式给出时采用蒙特卡洛方法很难处理, 在这种情况下, 采用迭代蒙特卡洛采样方法的前提条件是获得的采样必须收敛于目标联合后验分布. 这种迭代蒙特卡洛过程产生一个具有马尔科夫性质的随机序列, 称为马尔科夫链蒙特卡洛过程.

从理论上讲, 应用 MCMC 方法随机采样产生的马尔科夫序列最终会收敛于目标概率分布, 而在可靠性评估实际应用中, 采样生成的马尔科夫链收

敛速度难以预测,使得有时采用这种简化方法运算时反而需要花费更大的代价.此外,利用 MCMC 方法对 Weibull 分布进行分析时,在形参未知的情况下,需要针对分布中每个参数推导出全条件后验分布,这在一些情况下非常困难.

针对上述问题,本文提出了一种电子设备贝叶斯可靠性评估的新方法.

2 过程描述

假设某电子设备寿命服从双参 Weibull 分布,其累积分布函数为

$$F(t) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m\right\}, t > 0 \quad (1)$$

式中, $\eta > 0$ 为尺度参数, $m > 0$ 为形状参数. 试验前由工程技术人员获得的验前信息为设备在两个时刻 t_1, t_2 的可靠度和标准差的估计值,即 $\hat{F}(t_1), \hat{F}(t_2), \hat{\sigma}\{\hat{F}(t_1)\}, \hat{\sigma}\{\hat{F}(t_2)\}$.

2.1 先验分布

首先建立设备累积失效概率的先验分布,假设累积失效率服从 Beta 分布,其分布密度为

$$\pi(p) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} p^{a-1} (1-p)^{b-1}, a > 0, b > 0 \quad (2)$$

式中, a, b 是 Beta 分布的参数. $\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数.

已知 Weibull 分布函数在某时刻 t 的值及其标准差, Beta 先验分布中参数可通过矩法获得^[4]

$$\hat{a} = \frac{\hat{F}(t)^2[1 - \hat{F}(t)]}{\hat{\sigma}^2\{\hat{F}(t)\}} - \hat{F}(t), \hat{a} + \hat{b} = \frac{\hat{a}}{\hat{F}(t)} \quad (3)$$

结合验前信息,根据式(3)可以确定 t_1, t_2 时刻设备失效率服从的 Beta 分布函数,对两时刻 Beta 分布函数进行随机采样,就可以获得 Weibull 分布函数在 t_1, t_2 时刻的取值对: $\{F_i(t_1), F_i(t_2)\}, i = 1, 2, \dots, n$. 对于任意取值对, Weibull 分布的尺度参数和形状参数可通过下式获得^[5]:

$$\eta = \exp\left(\ln(t_1) - \frac{F^*(t_1)}{\beta}\right), \\ m = \frac{F^*(t_2) - F^*(t_1)}{\ln(\frac{t_2}{t_1})} \quad (4)$$

式中, $F^*(t_k) = \ln(\ln(1 - F(t_k))^{-1}), k = 1, 2$.

由 n 对 $\{F_i(t_1), F_i(t_2)\}$ 可以定义 n 对 Weibull 分布参数 $\{\eta_i, m_i\}$, 就可以构造 Weibull 分布参数的离散联合先验分布.

再根据构造的先验分布 $F_i(t; \eta_i, m_i)$, 可以获得

Weibull 分布在 t_3 时刻的可靠性参数,根据式(3),得到 t_3 时刻 Beta 分布的参数的估计值 a 和 b , 就可以近似确定 t_3 时刻的 Beta 先验分布.

2.2 后验分布

在 Weibull 分布参数联合先验分布和 t_3 时刻的 Beta 先验分布基础上, 就可以得到 Weibull 分布在某确定点处的 Beta 后验分布和 Weibull 分布参数的联合后验分布.

(1) Weibull 分布在某确定点处的后验分布

t_3 时刻的 Beta 先验分布现在可以用来进行 Bayes 估计. 假定 t_3 时刻观察数据为 N 个元件中有 f 个失效. 根据 Bayes 定理有

$$\pi(p | D) = \frac{\Gamma(a+b+N)}{\Gamma(a+N-f)\Gamma(b+f)} p^{N-f+a-1} (1-p)^{b+f-1} \quad (5)$$

由此可见, t_3 时刻的后验分布服从 $\text{Beta}(a^*, b^*)$, 其中, $a^* = a + N - f, b^* = b + f$.

(2) Weibull 分布参数的后验分布

Weibull 分布参数的联合后验分布在数值上可由已知 Beta 先验分布在时刻 t_1, t_2, t_3 随机采样获得. 选择采样均值作为 Weibull 分布参数的后验估计, 从而可以得到 Weibull 分布后验模型, 进而可以对设备的可靠性进行评估.

3 实例分析

根据专家经验, 某电子设备的可靠度在 1 年和 2 年时分别为 0.99 和 0.97, 投入 8 个试件进行 3 年定时截尾寿命试验, 结果为 1 个失效数据, 7 个截尾数据, 求该设备的可靠性参数模型. 由可靠度和分布函数的关系可知, $\hat{F}(t_1) = 0.01, \hat{F}(t_2) = 0.03$, 假设主观经验有 10% 的误差, 以此作为误差系数, 则相应标准差估值分别为 $\hat{\sigma}\{\hat{F}(t_1)\} = 0.001, \hat{\sigma}\{\hat{F}(t_2)\} = 0.003$. 根据式(3)可以计算出 Beta 分布在两点参数分别为 $\{a_1 = 98.99, b_1 = 9\ 800.01\}, \{a_2 = 96.97, b_2 = 3\ 135.36\}$. 通过对两 Beta 分布的随机采样 ($n = 5\ 000$), 并利用式(4)获得相应的 Weibull 分布参数对, 就得到了如图 1 所示的 Weibull 分布参数的联合先验分布. 与先验分布相对应的参数的先验估计为 $\{\hat{m} = 1.6, \hat{\eta} = 20.05\}$. 在 $t_3 = 3$ 年时的失效率和标准差估计值分别为 0.047 和 0.004 8. 通过式(3), 可转换为 t_3 时 Beta 分布的参数 $\{a_3 = 91.32, b_3 = 1\ 851.66\}$.

接下来, 考虑 t_3 时的截尾试验结果, 为 8 个观测

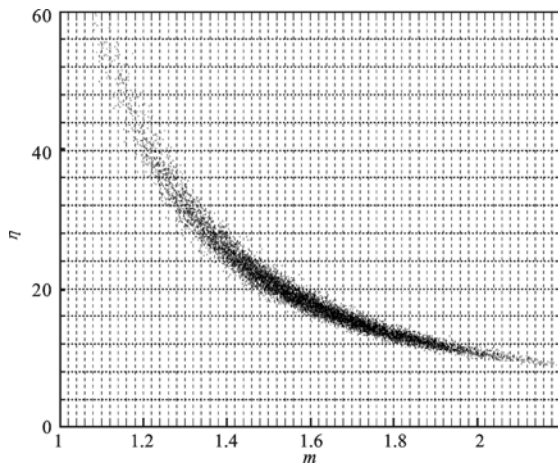


图1 Weibull 分布参数联合先验分布

试件中有 1 个失效. 按照式(5), t_3 时刻的后验 Beta 分布参数 $\{a'_3 = 92.32, b'_3 = 1\ 858.66\}$. 图 2 显示了通过对 t_1, t_3 时刻 Beta 分布随机采样并利用公式(4)得到的 Weibull 分布参数联合后验分布. Weibull 参数相应的后验估计值为 $\{m = 1.43, \eta = 26.36\}$. t_3 时刻失效率后验估计是 0.044, 标准差为 0.004 81, 估计结果如表 1 所示.

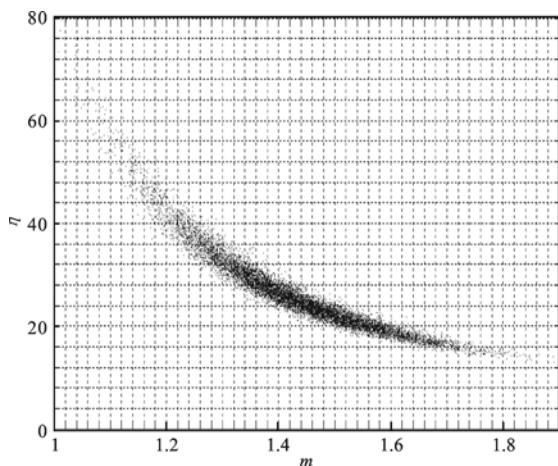


图2 Weibull 分布参数联合后验分布

表1 先验、后验估计值

	先验分布			后验分布
	$t_1 = 1$ (先验值)	$t_2 = 2$ (先验值)	$t_3 = 3$ (推断值)	$t_3 = 3$ (推断值)
$F(t)$	0.01	0.03	0.04 7	0.04 4
$\sigma\{F(t)\}$	0.001	0.003	0.004 8	0.004 81
a	98.99	94.95	91.32	92.32
b	9 800.01	1 804.05	1 851.66	1 858.66
η		20.05		26.36
m		1.6		1.43

为验证本文方法的有效性, 采用文献[5]中基

于 Gibbs 采样的 MCMC 方法对算例进行比较运算, 基本过程如下:

考虑定数截尾寿命试验样本 D : n 个试验样品, 观察到 r 个顺序寿命数据 $t_1, \dots, t_r$ 后试验结束, 其他样品在时刻 t_r 时被截尾. 则样本似然函数为

$$\begin{aligned} L(D | m, \eta) &= \prod_{i=1}^r f(t_i) [1 - F(t_r)]^{n-r} \\ &= m^r \eta^{-m} U^{m-1} \exp[-X^{(m)} / \eta^m] \end{aligned} \quad (6)$$

其中, $U = \prod_{i=1}^r t_i$, $X^{(m)} = \sum_{i=1}^r t_i^m + (n-r) t_r^m$.

假设参数 m 与 η 相互独立, 根据 Jeffreys 不变性准则, 取 m 和 η 的联合验前分布为^[6]

$$\pi(m, \eta) \propto \frac{1}{\eta}, m > 0, \eta > 0 \quad (7)$$

根据 Bayes 定理, m 和 η 的验后概率密度函数为

$$\begin{aligned} \pi(m, \eta | D) &= \frac{f(D | m, \eta) \pi(m, \eta)}{\iint f(D | m, \eta) \pi(m, \eta) d\eta dm} \\ &\propto m^r \eta^{-(m+1)} U^{m-1} \exp[-X^{(m)} / \eta^m] \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8) 易知, 在给定另一个参数的情况下, m 和 η 的完全条件密度的核为

$$f(\eta | m, D) \propto \eta^{-(m+1)} \exp(-\eta^{-m} X^{(m)}) \quad (9)$$

$$f(m | \eta, D) \propto m^r \eta^{-m} U^{m-1} \exp(-\eta^{-m} X^{(m)}) \quad (10)$$

虽然式(9)、(10) 并不是常见的分布函数形式, 但经过简单的变换即可转化为常见的分布进行抽样.

以式(10) 为例, 令 $\alpha = \eta^{-m}$, 则变为

$$\begin{aligned} f(\alpha | m, D) &\propto \alpha^{-(r+1/m)} \exp(-\alpha X^{(m)}) | - \\ \frac{1}{m} \alpha^{-1/m-1} | &\propto \alpha^{r-1} \exp(-\alpha X^{(m)}), \alpha > 0 \end{aligned}$$

显然是参数为 r 和 $X^{(m)}$ 的伽马分布, 从中抽出随机数 α , 再由 $\eta = \alpha^{-1/m}$, 即可获得服从(9) 的随机数 η .

带入算例中的参数, 采用 WinBUGS 软件进行 MCMC 运算. 在迭代过程中, 通过 Gelman-Rubin 比率^[8]来观察马尔科夫链的收敛性. 一共完成 5 500 次迭代. 观察发现, 500 迭代之后, 采样值已基本收敛. 因此, 马尔科夫链的前 500 次采样都被丢弃, 剩下的 5 000 次采样值结合起来用于估计参数的后验分布, 本例中采用样本均值作为 Weibull 分布后验参数的估计. 运算结果见表 2.

为验证上述两种方法运算结果的准确性, 采用文献[7]中一种典型的 Weibull 分布下 Bayes 可靠

性评估方法运算 Weibull 分布的后验参数,思想如下:

由于存在关于可靠度 R_t 的验前信息,假设可靠度服从对数逆伽玛分布:

$$\pi(R_t) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} R_t^{b-1} [\ln(1/R_t)]^{a-1}, a, b > 0 \quad (11)$$

由可靠度的验前密度函数可得给定 m 下 η 的条件验前密度函数:

$$\pi(\eta | m) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{m}{\eta} \left(\frac{\tau}{\eta}\right)^{am} \exp\{-b(\frac{\tau}{\eta})^m\} \quad (12)$$

考虑形状参数 m 的验前分布:

$$\pi(m) \propto \frac{1}{m}, m \geq 0 \quad (13)$$

根据 Bayes 定理,可按下式求得 Weibull 分布参数的后验估计:

$$\hat{m} = \int_0^\infty \int_0^\infty m \cdot \pi(m, \eta | D) d\eta dm \quad (14)$$

$$\hat{\eta} = \int_0^\infty \int_0^\infty \eta \cdot \pi(m, \eta | D) dm d\eta \quad (15)$$

表 2 三种方法运算结果比较

方法	文献[7]中 方法	文献[6]中 MCMC 方法	本文 方法
参数估计值			
$\hat{m}$	1.46	1.44	1.43
$\hat{\eta}$	26.67	27.13	26.36

表 2 给出了三种方法运算结果比较.从中可以看出,三种方法运算结果差别很小.以文献[6]中方法运算结果为参考,MCMC 方法迭代初期的样本并不收敛,采样数据会被丢弃,从开始到有效采样前,需要耗费一定的时间;此外,对算例中 Weibull 分布来说,文中简化方法一次采样可生成两个参数的取值对,而 MCMC 方法需要在两个参数间迭代采样,运算过程相对更复杂一些,随着参数维数的和采样数的增加,差别会更加明显.加之前面所述的适应性问题,文中提出的简化方法在运算复杂性和适用性上要优于 MCMC 方法.

以上分析过程充分说明,文中提出的方法是一种有效的贝叶斯运算简化方法,可以在确保运算精度的前提下,简化贝叶斯可靠性评估中后验参数运算的时间,从而提高评估效率.

4 结束语

本文针对可靠性评估中贝叶斯运算的复杂性问题,提出了一种电子设备常用寿命分布下可靠性评估的新方法.核心在于允许基于随机采样建立分布参数的离散联合先验和后验分布.算例应用表明,与传统的 Bayes 运算相比,此方法可以大大简化复杂的数值运算,与 MCMC 方法相比具有更高的效率和更好的适用性.

随着问题研究的不断深入,贝叶斯方法在应用中尚有许多问题需要解决,如复杂系统的多级综合问题,模糊可靠性的贝叶斯融合问题等等,这都是未来工作中需要深入研究的问题.

参考文献:

- [1] 李荣,王慧频,蔡洪. Weibull 分布下 Bayes 可靠性评估的工程方法[J]. 系统工程与电子技术, 1998(10): 74-77.
- [2] James C Spall. Estimation via markov chain monte carlo[J]. IEEE Control System Magazine, 2003, 23(2): 35-45.
- [3] M Modaress, M Kaminksiy, V Krivtsov. Reliability engineering and risk analysis: a practical guide[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1999.
- [4] G E P Box, C Tiao. Bayesian inference in statistical analysis [M]. Boston: Addison-Wesley Publishing Company, 2003.
- [5] 乔世君,张世英. 用 Gibbs 抽样算法计算定数截尾时 Weibull 分布的贝叶斯估计[J]. 数理统计与管理, 2000, 19(2): 35-40.
- [6] 张尧庭,陈汉峰. 贝叶斯统计推断[M]. 北京:科学出版社, 1991.
- [7] 李荣. 复杂系统 Bayes 可靠性评估方法研究[D]. 长沙:国防科学技术大学, 2000.

作者简介:

尹宗润 男, (1981-), 博士. 研究方向为电子设备可靠性评估.

李俊山 男, (1956-), 教授, 博士生导师. 研究方向为可靠性工程.

苏东 男, (1975-), 助理讲师. 研究方向为可靠性工程.